

# Jak wygrać w LOTTO

Copyright © 2010-2011

**ZBIGNIEW FALEK**

<http://www.informacja.pl/lotto>

## **Zgoda na bezpłatne powielanie i rozpowszechnianie całości opracowania**

Książka ta może być powielana i rozpowszechniana za pomocą dowolnych urządzeń, w tym elektronicznych, mechanicznych kopiujących, nagrywających i innych, ale tylko jako integralna całość.

## **Zakaz dzielenia tekstu oraz rozpowszechniania i powielania fragmentów opracowania**

Zabrania się dzielenia tekstu na fragmenty, dokonywania jakichkolwiek skrótów i uproszczeń oraz ich powielania i rozpowszechniania – bez pisemnej zgody autora i wydawcy

## **Wyłączenie odpowiedzialności**

Książka powstała wyłącznie w celach informacyjnych. Autor opracowania nie odpowiada za ewentualne szkody wynikłe z użytkowania zawartych w nim informacji.

## Spis treści

<b>Wstęp</b> .....	3
<b>Historia powstania Lotto</b> .....	6
<b>Kombinatoryka</b> .....	7
<i>Tabela 1. Zestawienie ciągów ze zbioru X zawierającego pewne (różne) elementy.</i> .....	8
<i>Tabela 2. Przykłady podzbiorów.</i> .....	8
<b>Prawdopodobieństwo wygranej</b> .....	10
<b>Wartość oczekiwana wygranej - uczciwa stawka za zakład</b> .....	11
<i>Tabela 3. Prawdopodobieństwa i wysokości konkretnych wygranych w Lotto.</i> .....	11
<i>Tabela 4. Prawdopodobieństwa, wysokości wygranych i wartości oczekiwane w Multi Multi.</i> .....	11
<b>Systemy Lotto</b> .....	14
<i>Tabela 5. System pełny: 9 liczb, 6 skreśleń, podany w porządku leksykograficznym.</i> ....	14
<b>Systemy pełne</b> .....	15
<b>Systemy skrócone</b> .....	15
<i>Tabela 6. Podział systemu pełnego: 9 liczb, 6 skreśleń, na rozłączne systemy skrócone.</i> 15	
<i>Rysunek 1. Generowanie systemu skróconego w programie Multi Multi firmy Falcom.</i> 17	
<i>Tabela 7. Liczba rozłącznych systemów skróconych (oraz liczba zakładów systemu pełnego) w zależności od ilości liczb (3..15) i liczby skreśleń (2..10).</i> .....	18
<b>Systemy gwarantowane (Steinera)</b> .....	18
<i>Tabela 8. System pełny: 8 liczb, 3 skreślenia.</i> .....	19
<b>Systemy gwarantowane</b> .....	19
<b>Konfigurowanie systemów Lotto</b> .....	21
<b>Systemy spójne</b> .....	21
<b>Systemy wielospójne</b> .....	22
<b>Systemy wagowe</b> .....	23
<b>Systemy Lotto z gwarancją</b> .....	25
<b>Systemy Arfy</b> .....	26
<i>Rysunek 2. Generowanie systemów Arfy z gwarancją w programie Multi Multi firmy Falcom.</i> .....	26
<i>Tabela 9. System z gwarancją 5 przy 5. 12 liczb, 6 skreśleń, 132 zakłady.</i> .....	26
<b>Zakończenie</b> .....	29
<b>Podziękowanie</b> .....	29
<b>Informacja o autorze</b> .....	29
<b>Statystyka</b> .....	29

## Wstęp

„Matematyka jest królową nauk a teoria liczb jest królową matematyki.” Słowa te oddają to co łatwo zrozumie ktoś kto matematyką zajmował się z zamiłowaniem, rozumiał ją, lubił i miał okazję ją poznać. I nie ma się czemu dziwić. Standardowe wykłady z matematyki podawane w sposób sztywny i nie przystępny dla przeciętnego człowieka nie pokazują tego co w matematyce jest najistotniejsze – rozumowania i kojarzenia faktów.

Weź czystą kartkę papieru i wytnij z niej kwadrat. Połóż go na stole i przyjrzyj się mu. Czy jest w nim coś ciekawego? Jeżeli uznasz, że niewiele, weź nożyczki i rozetnij go na połowę odkładając jedną część po twojej lewej stronie. Drugą część ponownie rozetnij na połowę i jedną z części ponownie odłóż po lewej stronie. Czy zauważyłeś, że w tym miejscu leży teraz  $1/2$  i  $1/4$  kartonika? Idąc dalej tym tropem dochodzimy do wniosku, że przy dalszym przecinaniu pozostałej części kartonika na połowę, ścinki po lewej stronie układają się w następujący szereg:  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$ ,  $1/16$ ,  $1/32$ , ...

Teoretycznie szereg w którym następna liczba jest o połowę mniejsza od poprzedniej możemy budować w nieskończoność. A czy wiesz jaka jest suma nieskończonego szeregu:  $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \dots$ ?

Odpowiedź tkwi w kartce papieru która przed chwilą leżała na stole. Suma nieskończonego szeregu jest równa 1 (jeden kartonik).

Powyższy przykład powinien nas uczulić na wszystko co z pozoru wydaje się proste i oczywiste. Od tej pory baczniej będziemy się przyglądać wszystkim trywialnym spostrzeżeniom i stwierdzeniom. A nuż kryją w sobie coś ciekawego. Po nabraniu odrobiny praktyki być może zmienimy twarz i staniemy się świadomymi graczami Lotto.

Przyjrzyjmy się teraz regulaminowi gry w Multi Multi w którym obstawiać możemy dowolną (od 1 do 10) ilość liczb oraz określać dowolną krotność stawki za zakład. W wypadku obstawienia jednej liczby oraz wybrania jej przez maszynę w kolejnym losowaniu, zgodnie z regulaminem otrzymamy wygraną w wysokości obstawionej stawki pomnożonej przez 2.

W losowaniu bierze udział 80 kul z których maszyna wybiera 20. Teoretycznie więc szansa wylosowania obstawianej liczby wynosi jak 1 do 4. Ze szczegółowych statystyk wykonanych na podstawie setek losowań Multi Multi wynika oczywiście, że każda z 80 liczb wcześniej czy później zostanie wylosowana.

Wybermy zatem jedną konkretną liczbę którą będziemy od dzisiaj obstawiać w kolejnych losowaniach. Może to być całkowicie dowolna liczba. Wiemy, że niebawem liczba ta zostanie wylosowana - a my (w losowaniu w którym to nastąpi) wygramy. Mała to jednak pociecha

skoro na sukces należy czekać co najmniej kilka losowań (tracąc jednocześnie w przegranych losowaniach zainwestowane pieniądze).

Czy zatem gra na jedną liczbę nie ma sensu i musi prowadzić do przegranej? Oczywiście tak, chociaż za chwilę pokażemy, że może być dokładnie odwrotnie.

Założmy, że w pierwszym losowaniu obstawiamy stawkę podstawową 2,50 zł i przegrywamy. Gramy dalej na wybraną liczbę ale tym razem nie obstawiamy już 2,50 a  $3 \times 2,50 = 7,50$  zł. Jeżeli wygramy zacieramy ręce bo zainwestowaliśmy do tej pory 10 zł (2,50 zł poprzednia przegrana + 7,50 zł obecna stawka) a otrzymamy 15 zł (2 x obstawione 7,5 złote). Mamy więc 5 zł. na czysto.

Gdy za drugim razem przegramy nie tracimy humoru. W trzecim losowaniu obstawiamy stawkę 22,50 zł. Gdy się powiedzie to tym razem otrzymamy  $2 \times 22,50 = 45$  zł. wygranej. Ponieważ nasze wydatki ( $2,50 + 7,50 + 22,50 = 32,50$ ) wyniosły 32,50 zł. Będziemy mieli 12,5 zł zysku. Gdy przegramy, z całkowitym spokojem udajemy się do kolektury, gdzie w czwartym losowaniu obstawimy 67,50 zł na tą samą co w poprzednich losowaniach liczbę...

Teoretycznie istnieje więc metoda która w 100% doprowadzi nas do wygranej. Zwiększając - w razie przegranej - trzykrotnie obstawianą poprzednio stawkę, otrzymamy w chwili wylosowania obstawianej liczby, kwotę wydaną na wszystkie dotychczasowe przegrane, plus sporą wygraną - tym większą, im więcej było przegranych losowań.

Podany sposób gry, tak jak przytoczony we wstępie sposób cięcia papierowego kartonika (tam: dwukrotnie mniejsze kawałki – tutaj: trzykrotnie większe stawki), nazywa się w matematyce: ciągiem geometrycznym. Nie wnikając w definicje oraz twierdzenia matematyczne związane z wymienionym zagadnieniem, warto dodać, że można podać wzór na wysokość wygranej w n-tym losowaniu.

Zastanówmy się teraz przez chwilę: dlaczego Lotto nie zbankrutuje? Czyżby system był na tyle tajemniczy, że nikt przed nami go nie odkrył? Być może znikoma część osób gra właśnie takim sposobem, ale na pewno nie brak masowego wysyłania kuponów podaną metodą jest przyczyną braku bankructwa monopolu loteryjnego. Słabość omawianej metody tkwi we wzorze na stawkę, którą należy obstawić w n-tym losowaniu Multi Multi. Stawka ta to

$$\text{Stawka} = Sp \cdot 3^{n-1}$$

gdzie Sp – jest stawką podstawową (na dzień 31.08.2010 wynosi 2,50 zł), a n - numerem kolejnego losowania.

Łatwo policzyć, że po 10 kolejnych przegranych w jedenastym losowaniu musielibyśmy obstawić:  $2,50 \cdot (3)^{10} = 147622,50$  zł! Czy masz może zbędne 150 tys. złotych do zaryzykowania?

Analiza ponad 1800 losowań Multi Multi pokazuje, że na wylosowanie kompletu (80) liczb należy – niestety, czekać około 16 losowań. Tak więc dopiero po 8 dniach (losowanie odbywa się dwa razy codziennie) mamy blisko 100% pewność, że wszystkie liczby (w tym ta którą uparcie obstawiamy) zostały już wylosowane. Najdłuższy taki okres oczekiwania który do tej pory zanotowano to aż 32 losowania a najkrótszy 1 losowanie.

Jeżeli, mimo tego<sup>1</sup>, czytelnik widzi istotne zalety podanej metody, radzę nie wybierać dowolnej liczby do obstawiania podanym sposobem. Ze statystyk wynika bowiem, że najlepiej wybrać liczbę która pada najczęściej w danej chwili a nie taką która nie pada (!). Na taką liczbę czekamy średnio tylko od 3 do 4 losowań.

Istnieje również uzasadnione przypuszczenie, że podana metoda gry została zauważona (i uznana jednak za niebezpieczną) przez zagranicznych organizatorów gier liczbowych zbliżonych do Multi Multi (np. Keno). W chwili obecnej regulaminy tych gier zostały zmienione i nie przewidują możliwości obstawiania tylko jednej wybranej liczby.

---

<sup>1</sup> 70-letnia mieszkanka Genui we Włoszech, śledząc miejscową loterię, zauważyła, że od dłuższego czasu nie pojawiał się jeden z numerów. Postanowiła więc go obstawiać, w przekonaniu, że wcześniej czy później przyniesie jej szczęście. Jej system był bardzo podobny – w każdym losowaniu obstawiała tą samą liczbę i za każdym razem podwajała stawkę, żeby odzyskać zainwestowane wcześniej pieniądze. Ale wyęskniony numer zawziął się, a hazard doprowadził nieszczęsną kobietę do stanu całkowitego uzależnienia. By kontynuować grę, sprzedała mieszkanie, rzucając na szalę dorobek całego życia. Szczęścia do wybranej liczby nadal nie miała, za to pecha sporego – ostatnie 80 mln, jakie pozostały po sprzedaży mieszkania, padło łupem złodziei.

## Historia powstania Lotto

Teorię rachunku prawdopodobieństwa zapoczątkował Blaise Pascal (1623-1662). Ten francuski matematyk, fizyk, pisarz i filozof jako pierwszy zajmował się prawdopodobieństwem z matematycznego punktu widzenia. Studia nad prawdopodobieństwem prowadzone przez Pascala połączone były trójkątem liczbowym odkrytym na przełomie XI i XII w. przez Chińczyków. Rezultaty tych prac okazały się tak znaczące, że dzisiaj trójkąt ten nosi nazwę trójkąta Pascala. W grach analizowanych przez Pascala gracze nie kierują się wyborem posunięć gdyż wszystkie posunięcia są losowe, przy czym znane są prawdopodobieństwa ich występowania.

W latach 30 XX w. matematyk amerykański pochodzenia węgierskiego John von Neumann (1903-1957) zaczął zajmować się teorią ogólniejszych gier. W swej podstawowej pracy z 1926 roku położył fundamenty tej teorii i udowodnił główny rezultat. Później wspólnie z Oskarem Morgensternem napisał obszerny wykład w którym w szczególności omówił znaczenie teorii gier dla ekonomiki. Nieco wcześniej bo już w grudniu 1925 roku polski matematyk Hugo Steinhaus (1887-1972) zaprezentował, w piśmie studenckim Myśl Akademicka, artykuł podający podstawowe definicje z teorii gier i pościgu.

Neumann wraz z matematykiem Stanisławem Ulamem (1909-1984) był współtwórcą metody modelowania matematycznego Monte Carlo. Interesując się powiązaniem matematyki z biologią, stworzył teorię automatów komórkowych mających zdolność samoreprodukcji. Przykładem takiego automatu jest gra life (gra życie).

W teorii gier nie wyklucza się posunięć losowych, jednakże w czystych grach losowych gracze nie podejmują żadnych decyzji mających wpływ na przebieg gry, a konflikt, jaki zachodzi pomiędzy ich interesami, jest nieistotny. Teoria gier jest związana przede wszystkim ze statystyką a gry takie jak szachy, brydż czy poker są dla tej teorii doskonałymi przykładami.

## Kombinatoryka

Kombinatoryka jako dział matematyki dyskretnej powstała dzięki grom hazardowym. Nauka ta jest teorią obliczania liczby elementów zbiorów skończonych.

Jednym z podstawowych pojęć kombinatoryki jest pojęcie kombinacji bez powtórzeń. Kombinacja bez powtórzeń to każdy podzbiór zbioru skończonego. Jeżeli weźmiemy dowolny zbiór  $n$  elementowy  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  to kombinacją  $k$ -elementową tego zbioru nazywa się każdy  $k$ -elementowy jego podzbiór ( $0 \leq k \leq n$ ). W praktyce często używa się też określenia "kombinacja z  $n$  elementów po  $k$  elementów". Przykładowo dla zbioru trzelementowego  $X = \{a, b, c\}$  ( $n=3$ ) wszystkie dwuelementowe kombinacje bez powtórzeń ( $k=2$ ) będą wyglądały następująco  $\{ab, ac, bc\}$ . Liczba wszystkich kombinacji wynosi więc 3. Ogólnie, liczba kombinacji bez powtórzeń wynosi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

gdzie  $\binom{n}{k}$  nazywa się symbolem lub współczynnikiem dwumianowym Newtona a symbol  $n!$  ( $n$  silnia) jest iloczynem  $n$  kolejnych liczb naturalnych  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ . Wartości dwumianu Newtona można odczytać z trójkąta Pascala ( $k$ -ty wyraz wiersza  $n$ ).

$n = 0$										1														
$n = 1$										1		1												
$n = 2$										1		2		1										
$n = 3$										1		3		3		1								
$n = 4$										1		4		6		4		1						
$n = 5$										1		5		10		10		5		1				
$n = 6$										1		6		15		20		15		6		1		
$n = 7$										1		7		21		35		35		21		7		1

Podstawową własnością trójkąta Pascala jest to, że suma dwóch dowolnych sąsiednich wyrazów z tego samego wiersza jest równa wyrazowi znajdującemu się poniżej. Suma wszystkich wyrazów wiersza  $n$  wynosi natomiast  $2^n$ . Przykładowo suma wyrazów wiersza 4 ( $n=4$ ) wynosi  $2^4 = 16$ , a zatem ogólnie możemy zapisać:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Symbol Newtona występuje również we wzorze do obliczania potęg dwumianów

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Przykładowo  $(a + b)^5 = 1a^0b^5 + 5a^1b^4 + 10a^2b^3 + 10a^3b^2 + 5a^4b^1 + 1a^5b^0$ , gdzie liczby wytłuszczone są wyrazami 5 wiersza trójkąta Pascala. Po uproszczeniu (uwzględniając, że  $a^0 = 1$ ;  $b^0 = 1$ ;  $a^1=a$ ;  $b^1=b$ ) wzór ten przyjmie następującą postać:

$$(a + b)^5 = b^5 + 5ab^4 + 10a^2b^3 + 10a^3b^2 + 5a^4b + a^5$$

Pozostałe pojęcia kombinatoryki takie jak permutacje i wariacje przedstawiono w tabeli poniżej.

Tabela 1. Zestawienie ciągów ze zbioru X zawierającego pewne (różne) elementy.

Rodzaje zestawień	Zbiór X	W tworzonych ciągach			Lista możliwych zestawień
		ile jest elementów?	elementy mogą się powtarzać?	kolejność istotna?	
Permutacje bez powtórzeń	n-elementowy	n	nie	tak	$P_n = n!$
Permutacje z powtórzeniami	k-elementowy		tak, odpowiednio $n_1, n_2, \dots, n_k$ razy*		$P_n^i = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$
Wariacje bez powtórzeń	n-elementowy	k (k ≤ n)	nie	nie	$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Wariacje z powtórzeniami			tak		$W_n^k = n^k$
Kombinacje bez powtórzeń			nie		$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Kombinacje z powtórzeniami			tak		$\bar{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

\* Pierwszy z k elementów występuje  $n_1$  razy, drugi  $n_2$  razy itd.;  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ .

Tabela 2. Przykłady podzbiorów.

Zbiór X	Zadanie	Możliwe podzbiory
X = { a, b, c } }	permutacje bez powtórzeń	{ abc, acb, bac, bca, cab, cba }
	wariacje bez powtórzeń (k=2)	{ ab, ba, ac, ca, bc, cb }



	wariacje z powtórzeniami (k=2)	{ ab, ba, ac, ca, bc, cb, aa, bb, cc }
	kombinacje bez powtórzeń (k=2)	{ ab, ac, bc }
	kombinacje z powtórzeniami (k=2)	{ ab, ac, bc, aa, bb, cc }
X = { a, c }	permutacje z powtórzeniami (k=2, n=3, n <sub>1</sub> =2, n <sub>2</sub> =1)	{aac, aca, caa}

Jeśli  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ , to możemy każdemu podzbirowi  $Y$  zbioru  $X$  przyporządkować wzajemnie jednoznacznie  $n$  wyrazową wariację z powtórzeniami dwóch elementów (0 i 1), zwaną funkcją charakterystyczną tego podzbioru

$$f_Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{gd}y x \in Y \\ 0 & \text{gd}y x \notin Y \end{cases}$$

Zbiory permutacji, kombinacji i wariacji zaliczamy do tzw. schematów kombinatorycznych.

## Prawdopodobieństwo wygranej

Rozważania o Lotto rozpoczniemy od pojęcia prawdopodobieństwa klasycznego a następnie wyznaczmy takie prawdopodobieństwo w odniesieniu do szansy wygranej w Lotto. Jeżeli dane jest doświadczenie losowe, w którym każdy wynik jest jednakowo prawdopodobny, to dla dowolnego zdarzenia A związanego z tym doświadczeniem, prawdopodobieństwo  $P(A)$  tego zdarzenia wynosi:

$$P(A) = (\text{liczba wyników sprzyjających zdarzeniu A}) : (\text{liczba wszystkich możliwych wyników}).$$

Na podstawie tej definicji obliczymy jakie jest prawdopodobieństwo, że wypełniając jeden zakład Lotto trafimy (z 49 liczb) dokładnie  $k$  liczb ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ). Obstawiający zakład Lotto wybiera 6 liczb z 49. Wszystkie możliwe kombinacje uznajemy za jednakowo prawdopodobne. Ustalamy 6 liczb. Wtedy szukane prawdopodobieństwo jest równe stosunkowi liczby kombinacji zawierających  $k$  z 6 wybranych liczb do liczby wszystkich

kombinacji. Wszystkich kombinacji jest  $\binom{49}{6}$ . Teraz najpierw wybieramy  $k$  liczb z 6 wybranych, a następnie  $6 - k$  liczb z pozostałych 43 liczb. W ten sposób szukane prawdopodobieństwo wynosi:

$$\frac{\binom{6}{k} \binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$$

Przykładowo prawdopodobieństwo trafienia trójki wynosi

$$\frac{\binom{6}{3} \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = \frac{246820}{13983816} \cong \frac{1}{57}$$

czyli w przybliżeniu 1:57.

Prawdopodobieństwo, że wypełniając jeden zakład Lotto trafimy co najmniej  $k$  liczb wynosi natomiast:

$$\sum_{i=k}^6 \frac{\binom{6}{i} \binom{43}{6-i}}{\binom{49}{6}}$$

## Wartość oczekiwana wygranej - uczciwa stawka za zakład

Analizę Lotto musimy uzupełnić o pojęcie wartości oczekiwanej. Jeżeli liczby  $p_1, p_2, \dots, p_n$  są prawdopodobieństwami  $n$  zdarzeń, z których jedno musi nastąpić,  $w_1, w_2, \dots, w_n$  są odpowiednimi wygranymi, które gracz uzyska w przypadku wystąpienia tych zdarzeń, to suma:

$$Ew = p_1w_1 + \dots + p_nw_n$$

nazywa się wartością oczekiwaną wygranej dla tego gracza. Jest to średnia wygrana tego gracza przy założeniu powtarzania się tej samej sytuacji. Wartość oczekiwaną można również interpretować jako uczciwą stawkę przed nastąpieniem zdarzenia decydującego o wyniku gry. Obliczmy wartość oczekiwaną dla gry w Lotto. Ponieważ w grze tej, poza trzema trafieniami, wygrane, za 4, 5 i 6 trafień, nie są zwykle jednakowe, oprzemy się na konkretnym przykładzie losowania z dnia 29 grudnia 2007 roku.

Odpowiednie prawdopodobieństwa oraz wysokości wygranych podane są w tabeli 3.

Tabela 3. Prawdopodobieństwa i wysokości konkretnych wygranych w Lotto.

Liczba trafień	0	1	2	3	4	5	6
Prawdopodobieństwo wygranej	$p_0$	$p_1$	$p_2$	1/57	1/1032	1/54201	1/13983816
Kwota wygranej w zł z dnia 29.12.2007	0	0	0	16	230	7372	1831330

Z tabeli 3 wynika, że wartość oczekiwana wygranej  $Ew = 16/57 + 230/1032 + 7372/54201 + 1831330/13983816 = 0,28 + 0,22 + 0,14 + 0,18 = 0,82$  zł = 82 grosze. W związku z tym, że koszt jednego zakładu wynosi  $1,60$  zł + 25% = 2 zł, przeprowadzone obliczenia pokazują, że stawka w Lotto jest dwukrotnie zawyżona. Krótko mówiąc Lotto tylko połowę wpłaconych kwot przeznacza na wygrane.

Dla gry Multi Multi, wartości oczekiwane wygranych podano w tabeli 4.

Tabela 4. Prawdopodobieństwa, wysokości wygranych i wartości oczekiwane w Multi Multi.

Ilość skreśleń	Liczba trafień	Prawdopodobieństwo wygranej	Wygrana [zł]	Iloczyn	Wartość oczekiwana [zł]
S	i	$p_i$	$w_i$	$p_i * w_i$	Suma $p_i * w_i$

10	10	1:8911711	250 000	0,028053	1,019297
	9	1:163381	10 000	0,061207	
	8	1:7384	520	0,070423	
	7	1:621	140	0,225443	
	6	1:87	12	0,137931	
	5	1:19	4	0,210526	
	4	1:7	2	0,285714	
9	9	1:1380688	70 000	0,050699	1,013686
	8	1:30682	2 000	0,065185	
	7	1:1690	300	0,177515	
	6	1:175	42	0,24	
	5	1:31	8	0,258065	
	4	1:9	2	0,222222	
8	8	1:230115	22 000	0,095604	1,030695
	7	1:6232	600	0,096277	
	6	1:423	60	0,141844	
	5	1:55	20	0,363636	
	4	1:12	4	0,333333	
7	7	1:40979	6 000	0,146416	1,009103
	6	1:1366	200	0,146413	
	5	1:116	20	0,172414	
	4	1:19	4	0,210526	
	3	1:6	2	0,333333	
6	6	1:7753	1 300	0,167677	1,017765
	5	1:323	120	0,371517	
	4	1:35	8	0,228571	
	3	1:8	2	0,25	
5	5	1:1551	700	0,451322	1,025619
	4	1:83	20	0,240964	
	3	1:12	4	0,333333	
4	4	1:326	84	0,257669	1,005495
	3	1:23	8	0,347826	
	2	1:5	2	0,4	

3	3	1:72	54	0,75	1,035714
	2	1:7	2	0,285714	
2	2	1:17	16	0,941176	0,941176
1	1	1:4	4	1	1

Dane w ostatniej kolumnie pokazują, że niezależnie od ilości skreśleń wartość oczekiwana wygranej w Multi Multi wynosi w przybliżeniu 1 zł.

Mówiąc o wartości oczekiwanej warto również wspomnieć, że istnieją trzy różne rodzaje „średnich” dla danego ciągu liczb. Wartość średniej arytmetycznej - sumy wszystkich liczb danego ciągu podzielonej przez ich ilość; mediany - równej środkowemu co do wartości elementowi oraz dominanty - wartości która występuje najczęściej. Przykładowo dla ciągu liczb: 1,3,3,4,2,4,4 wartość średnia wynosi  $(1+3+3+4+2+4+4):7 = 21:7 = 3$ ; mediana wynosi 3 (bo 3 jest elementem środkowym ciągu: 1,2,3,3,4,4,4) a dominanta wynosi 4.

## Systemy Lotto

Załóżmy, że gramy w Lotto i zdecydowaliśmy obstawiać liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Zgodnie z regulaminem skreślać możemy dokładnie sześć liczb. W tym przypadku możemy zakreślić aż 84 różne zakłady.

Tabela 5. System pełny: 9 liczb, 6 skreśleń, podany w porządku leksykograficznym.

(1, 2, 3, 4, 5, 6); (1, 2, 3, 4, 5, 7); (1, 2, 3, 4, 5, 8); (1, 2, 3, 4, 5, 9); (1, 2, 3, 4, 6, 7); (1, 2, 3, 4, 6, 8); (1, 2, 3, 4, 6, 9); (1, 2, 3, 4, 7, 8); (1, 2, 3, 4, 7, 9); (1, 2, 3, 4, 8, 9); (1, 2, 3, 5, 6, 7); (1, 2, 3, 5, 6, 8); (1, 2, 3, 5, 6, 9); (1, 2, 3, 5, 7, 8); (1, 2, 3, 5, 7, 9); (1, 2, 3, 5, 8, 9); (1, 2, 3, 6, 7, 8); (1, 2, 3, 6, 7, 9); (1, 2, 3, 6, 8, 9); (1, 2, 3, 7, 8, 9); (1, 2, 4, 5, 6, 7); (1, 2, 4, 5, 6, 8); (1, 2, 4, 5, 6, 9); (1, 2, 4, 5, 7, 8); (1, 2, 4, 5, 7, 9); (1, 2, 4, 5, 8, 9); (1, 2, 4, 6, 7, 8); (1, 2, 4, 6, 7, 9); (1, 2, 4, 6, 8, 9); (1, 2, 4, 7, 8, 9); (1, 2, 5, 6, 7, 8); (1, 2, 5, 6, 7, 9); (1, 2, 5, 6, 8, 9); (1, 2, 5, 7, 8, 9); (1, 2, 6, 7, 8, 9); (1, 3, 4, 5, 6, 7); (1, 3, 4, 5, 6, 8); (1, 3, 4, 5, 6, 9); (1, 3, 4, 5, 7, 8); (1, 3, 4, 5, 7, 9); (1, 3, 4, 5, 8, 9); (1, 3, 4, 6, 7, 8); (1, 3, 4, 6, 7, 9); (1, 3, 4, 6, 8, 9); (1, 3, 4, 7, 8, 9); (1, 3, 5, 6, 7, 8); (1, 3, 5, 6, 7, 9); (1, 3, 5, 6, 8, 9); (1, 3, 5, 7, 8, 9); (1, 3, 6, 7, 8, 9); (1, 4, 5, 6, 7, 8); (1, 4, 5, 6, 7, 9); (1, 4, 5, 6, 8, 9); (1, 4, 5, 7, 8, 9); (1, 4, 6, 7, 8, 9); (1, 5, 6, 7, 8, 9); (2, 3, 4, 5, 6, 7); (2, 3, 4, 5, 6, 8); (2, 3, 4, 5, 6, 9); (2, 3, 4, 5, 7, 8); (2, 3, 4, 5, 7, 9); (2, 3, 4, 5, 8, 9); (2, 3, 4, 6, 7, 8); (2, 3, 4, 6, 7, 9); (2, 3, 4, 6, 8, 9); (2, 3, 4, 7, 8, 9); (2, 3, 5, 6, 7, 8); (2, 3, 5, 6, 7, 9); (2, 3, 5, 6, 8, 9); (2, 3, 5, 7, 8, 9); (2, 3, 6, 7, 8, 9); (2, 4, 5, 6, 7, 8); (2, 4, 5, 6, 7, 9); (2, 4, 5, 6, 8, 9); (2, 4, 5, 7, 8, 9); (2, 4, 6, 7, 8, 9); (2, 5, 6, 7, 8, 9); (3, 4, 5, 6, 7, 8); (3, 4, 5, 6, 7, 9); (3, 4, 5, 6, 8, 9); (3, 4, 5, 7, 8, 9); (3, 4, 6, 7, 8, 9); (3, 5, 6, 7, 8, 9); (4, 5, 6, 7, 8, 9);
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Zakłady systemu pełnego podane w tabeli 5 rozpisane są w tzw. porządku leksykograficznym (czyli naturalnym). Porządek leksykograficzny to pojęcie matematyczne odnoszące się do sposobu uporządkowania elementów zbiorów. Nazwa porządku leksykograficznego pochodzi od sposobu w jaki słowa są uporządkowane w słowniku, najpierw według pierwszej litery, następnie według drugiej, i tak dalej.

Każdą tablicę składającą się z dowolnej ilości różnych zakładów nazywać będziemy systemem.

## Systemy pełne

System składający się ze wszystkich możliwych do zakreślenia zakładów nazywamy **systemem pełnym**.

Ponieważ obstawianie systemu pełnego może okazać się zbyt kosztowne warto zastanowić się jak można go skrócić. Naturalnym pomysłem, który warto rozważyć, wydaje się być takie skrócenie systemu aby na wszystkich pozostawionych zakładach kolejne liczby występowały tyle samo razy.

Próba szybkiego znalezienia takiego rozwiązania dla 9 liczb i sześciu skreśleń mogła by wyglądać np. tak:

1, 2, 3, 4, 5, 6

7, 8, 9, 1, 2, 3

4, 5, 6, 7, 8, 9

gdzie każda liczba występująca w systemie powtarza się dokładnie dwa razy. Po uporządkowaniu leksykograficznie zapis ten będzie przedstawiał się następująco:

(1,2,3,4,5,6); (1,2,3,7,8,9); (4,5,6,7,8,9).

## Systemy skrócone

System w którym każda liczba występuje tyle samo razy nazywamy **systemem skróconym**.

Z podanej definicji wynika, że każdy system pełny jest jednocześnie systemem skróconym. Dla systemów skróconych prawdziwa jest również następująca zależność:

$$\text{Ilość zakładów} * \text{Ilość skreśleń} = \text{Ilość powtórzeń} * \text{Ilość liczb}$$

W opisywanym przykładzie wzór ten wyglądał by tak:

$$\text{Ilość zakładów} * 6 = \text{Ilość powtórzeń} * 9$$

$$(3*6 = 2 * 9)$$

Z matematycznego punktu widzenia rozpisanie systemu pełnego dla dowolnej ilości liczb i skreśleń nie stanowi problemu. Dużo trudniej jest podzielić system pełny na wiele grup składających się z rozłącznych systemów skróconych. Dla podanych 9 liczb i 6 skreśleń podział taki może wyglądać tak jak w tabeli 6.

*Tabela 6. Podział systemu pełnego: 9 liczb, 6 skreśleń, na rozłączne systemy skrócone.*

1.	(1, 2, 3, 4, 5, 6); (1, 2, 3, 4, 5, 9); (1, 2, 3, 4, 8, 9); (1, 2, 3, 7, 8, 9); (1, 2, 6, 7, 8, 9); (1, 5, 6, 7, 8, 9); (2, 3, 4, 5, 6, 7); (3, 4, 5, 6, 7, 8); (4, 5, 6, 7, 8, 9);
2.	(1, 2, 3, 4, 5, 7); (1, 2, 3, 4, 6, 9); (1, 2, 3, 5, 8, 9); (1, 2, 4, 7, 8, 9); (1, 3, 6, 7, 8, 9); (1, 4, 5, 6, 7, 8); (2, 3, 4, 5, 6, 8); (2, 5, 6, 7, 8, 9); (3, 4, 5, 6, 7, 9);
3.	(1, 2, 3, 4, 5, 8); (1, 2, 3, 4, 7, 9); (1, 2, 3, 6, 8, 9); (1, 2, 5, 7, 8, 9); (1, 3, 4, 5, 6, 7); (1, 4, 6, 7, 8, 9); (2, 3, 4, 5, 6, 9); (2, 4, 5, 6, 7, 8); (3, 5, 6, 7, 8, 9);
4.	(1, 2, 3, 4, 6, 7); (1, 2, 3, 5, 6, 9); (1, 2, 4, 5, 8, 9); (1, 2, 5, 6, 7, 8); (1, 3, 4, 7, 8, 9); (1, 4, 5, 6, 7, 9); (2, 3, 4, 5, 7, 8); (2, 3, 6, 7, 8, 9); (3, 4, 5, 6, 8, 9);
5.	(1, 2, 3, 4, 6, 8); (1, 2, 3, 5, 7, 9); (1, 2, 4, 6, 8, 9); (1, 3, 4, 5, 6, 8); (1, 3, 5, 6, 7, 8); (1, 3, 5, 7, 8, 9); (2, 3, 4, 5, 7, 9); (2, 4, 5, 6, 7, 9); (2, 4, 6, 7, 8, 9);
6.	(1, 2, 3, 4, 7, 8); (1, 2, 3, 6, 7, 9); (1, 2, 4, 5, 6, 7); (1, 2, 5, 6, 8, 9); (1, 3, 4, 5, 6, 9); (1, 4, 5, 7, 8, 9); (2, 3, 4, 5, 8, 9); (2, 3, 5, 6, 7, 8); (3, 4, 6, 7, 8, 9);
7.	(1, 2, 3, 5, 6, 7); (1, 2, 3, 6, 7, 8); (1, 2, 4, 5, 6, 9); (1, 2, 5, 6, 7, 9); (1, 3, 4, 5, 8, 9); (1, 4, 5, 6, 8, 9); (2, 3, 4, 6, 7, 8); (2, 3, 4, 7, 8, 9); (3, 4, 5, 7, 8, 9);
8.	(1, 2, 3, 5, 6, 8); (1, 2, 4, 5, 7, 9); (1, 2, 4, 6, 7, 8); (1, 3, 4, 5, 7, 8); (1, 3, 4, 6, 8, 9); (1, 3, 5, 6, 7, 9); (2, 3, 4, 6, 7, 9); (2, 3, 5, 7, 8, 9); (2, 4, 5, 6, 8, 9);
9.	(1, 2, 3, 5, 7, 8); (1, 2, 4, 5, 6, 8); (1, 2, 4, 6, 7, 9); (1, 3, 4, 5, 7, 9); (1, 3, 4, 6, 7, 8); (1, 3, 5, 6, 8, 9); (2, 3, 4, 6, 8, 9); (2, 3, 5, 6, 7, 9); (2, 4, 5, 7, 8, 9);
10.	(1, 2, 4, 5, 7, 8); (1, 3, 4, 6, 7, 9); (2, 3, 5, 6, 8, 9);

Warto zwrócić uwagę, że

suma dowolnych systemów skróconych daje również system skrócony

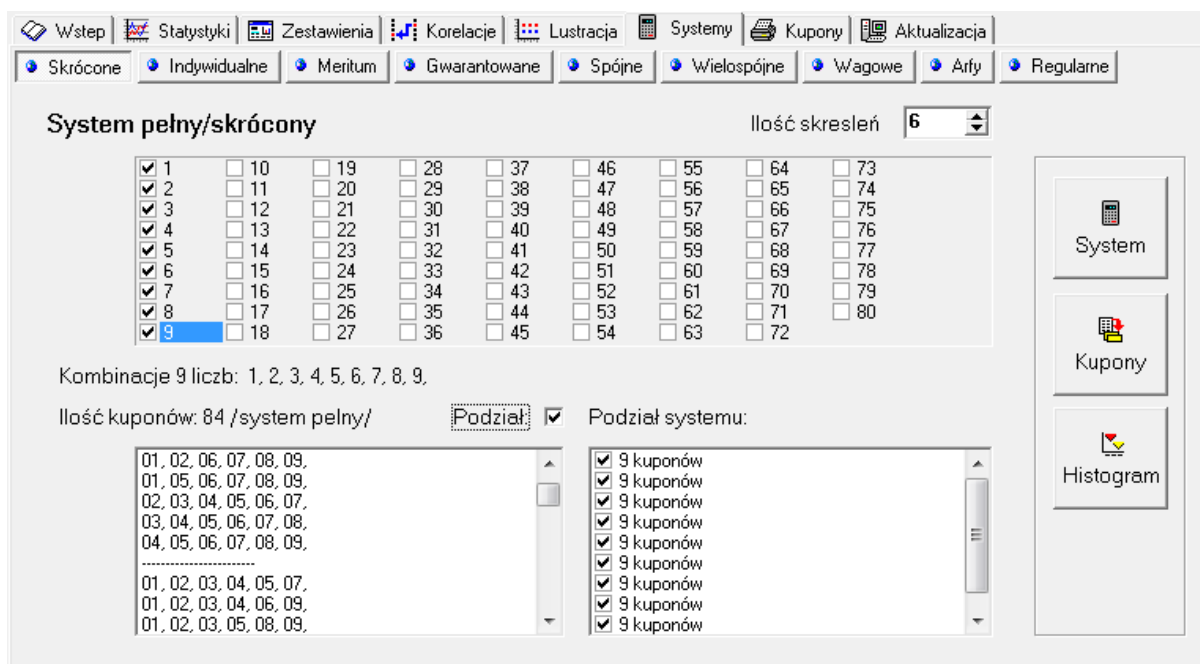
Wybranie zatem z powyższej tablicy dowolnych systemów i połączenie ich w jedną całość spowoduje, że w wyniku otrzymamy system skrócony.

W tabeli 5 kolorem szarym zaznaczono wszystkie zakłady które występują w tabeli 6 jako system oznaczony numerem 1.

Metoda uzyskania podziału systemu pełnego na systemy skrócone, którą wykorzystano do uzyskania zawartości tabeli nr 4, została zaimplementowana w oprogramowaniu komputerowych (rysunek 1).



Rysunek 1. Generowanie systemu skróconego w programie Multi Multi firmy Falcom.



Zródło: <http://www.informacja.pl/lotto>

Uzyskujemy w ten sposób jednoznaczny podział systemu pełnego na rozłączne systemy skrócone. Należy dodać, że każdy pojedynczy zakład w powstającym systemie skróconym jest „kluczem” dzięki któremu możemy zawsze „odtworzyć” pozostałe zakłady tego systemu. Pierwszy zakład każdego systemu wybrany według porządku leksykograficznego nazywamy „kluczem głównym” tego systemu. Przykładowo dla systemu 9 liczb i sześciu skreśleń (9/6) z tabeli 4 klucze główne będą wyglądały następująco:

(1, 2, 3, 4, 5, 6); (1, 2, 3, 4, 5, 7); (1, 2, 3, 4, 5, 8); (1, 2, 3, 4, 6, 7); (1, 2, 3, 4, 6, 8);  
 (1, 2, 3, 4, 7, 8); (1, 2, 3, 5, 6, 7); (1, 2, 3, 5, 6, 8); (1, 2, 3, 5, 7, 8); (1, 2, 4, 5, 7, 8);

Powyższą własność wykorzystamy teraz do stworzenia nowego rodzaju systemu. Każdemu z nas zdarzyło się obstawiać zakłady Lotto składające się z ulubionych układów. Często jednak po skreśleniu kilku takich zakładów kończy nam się koncepcja i nie bardzo wiemy jak skreślać dalej. W opisanej sytuacji warto zastosować nasze zakłady do podanej metody jako jej „klucze”. Otrzymamy wówczas system zbudowany w taki sposób, że nasze ulubione zakłady są częścią większego systemu skróconego (złożonego z kilku innych systemów skróconych). System skrócony „dobrany” do wskazanych przez gracza zakładów nazywamy **systemem meritum**. Mniejsze systemy skrócone, które go tworzą nazywamy **systemami indywidualnymi**. Systemy indywidualne są generowane dla pojedynczego klucza (zakładu).

Tabela 7. Liczba rozłącznych systemów skróconych (oraz liczba zakładów systemu pełnego) w zależności od ilości liczb (3..15) i liczby skreśleń (2..10).

	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	1 (3)	2 (6)	2 (10)	3 (15)	3 (21)	4 (28)	4 (36)	5 (45)	5 (55)	6 (66)	6 (78)	7 (91)	7 (105)
3		1 (4)	2 (10)	4 (20)	5 (35)	7 (56)	10 (84)	12 (120)	15 (165)	19 (220)	22 (286)	26 (364)	31 (455)
4			1 (5)	3 (15)	5 (35)	10 (70)	14 (126)	22 (210)	30 (330)	43 (495)	55 (715)	73 (1001)	91 (1365)
5				1 (6)	3 (21)	7 (56)	14 (126)	26 (252)	42 (462)	66 (792)	99 (1287)	143 (2002)	201 (3003)
6					1 (7)	4 (28)	10 (84)	22 (210)	42 (462)	80 (924)	132 (1716)	217 (3003)	335 (5005)
7						1 (8)	4 (36)	12 (120)	30 (330)	66 (792)	132 (1716)	246 (3432)	429 (6435)
8							1 (9)	5 (45)	15 (165)	43 (495)	99 (1287)	217 (3003)	429 (6435)
9								1 (10)	5 (55)	19 (220)	55 (715)	143 (2002)	335 (5005)
10									1 (11)	6 (66)	22 (286)	73 (1001)	201 (3003)

### Systemy gwarantowane (Steinera)

Pewne metody kombinatoryczne łatwo uzyskać dzięki geometrii. W 1786 roku w pobliżu Berna urodził się Jacob Steiner. Ten syn szwajcarskiego rolnika który do 14 roku życia był samoukiem nie potrafiącym czytać i pisać, dopiero gdy przekonał ojca, aby ten posłał go do szkoły, od razu wykazał niezwykle zdolności w dziedzinie matematyki i geometrii. Już w pięć lat później sam dawał prywatne lekcje, które umożliwiły mu dalsze studia. Steiner został uznany najlepszym geometrą od czasów Apoloniusza z Pergii. Studiował na uniwersytetach w Heidelbergu i Berlinie, w 1832 roku został uhonorowany doktoratem w Królewcu a w roku 1834 jako profesor objął katedrę matematyki w Berlinie.

Steiner<sup>2</sup> zasłynął więc jako genialny geometra ale warto dodać, że zajmował się również kombinatoryką przez co każdemu graczowi powinien kojarzyć się z systemami które zdefiniował i badał a które dzisiaj (trochę zapomniane), od jego nazwiska, nazywamy systemami Steinera. Abstrahując od ogólnej definicji tych systemów przybliżymy teraz jeden z jego wariantów.

Załóżmy, że gramy w Multi Multi obstawiając 8 liczb. System pełny rozpisany na 3 skreślenia wygląda następująco:

*Tabela 8. System pełny: 8 liczb, 3 skreślenia.*

(1, 2, 3); (1, 2, 4); (1, 2, 5); (1, 2, 6); (1, 2, 7); (1, 2, 8); (1, 3, 4); (1, 3, 5); (1, 3, 6); (1, 3, 7); (1, 3, 8); (1, 4, 5); (1, 4, 6); (1, 4, 7); (1, 4, 8); (1, 5, 6); (1, 5, 7); (1, 5, 8); (1, 6, 7); (1, 6, 8); (1, 7, 8); (2, 3, 4); (2, 3, 5); (2, 3, 6); (2, 3, 7); (2, 3, 8); (2, 4, 5); (2, 4, 6); (2, 4, 7); (2, 4, 8); (2, 5, 6); (2, 5, 7); (2, 5, 8); (2, 6, 7); (2, 6, 8); (2, 7, 8); (3, 4, 5); (3, 4, 6); (3, 4, 7); (3, 4, 8); (3, 5, 6); (3, 5, 7); (3, 5, 8); (3, 6, 7); (3, 6, 8); (3, 7, 8); (4, 5, 6); (4, 5, 7); (4, 5, 8); (4, 6, 7); (4, 6, 8); (4, 7, 8); (5, 6, 7); (5, 6, 8); (5, 7, 8); (6, 7, 8);
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Będziemy poszukiwać systemu skróconego rozpisanego na 4 skreślenia tak aby każda trójka z tabeli 5 występowała w nim tylko i wyłącznie jeden raz. Innymi słowy chcemy „upakować system pełny na 3 skreślenia do najkrótszego z możliwych systemu skróconego na 4 skreślenia”.

Łatwo policzyć, że tabela 8 zawiera 56 zakładów. W jednej czwórce szukanego systemu możemy upakować maksymalnie 4 różne trójki z tej tabeli. Zatem szukany system powinien zawierać  $56:4 = 14$  zakładów.

Steiner badał warunki (ilość liczb i skreśleń) przy których systemy takie jak ten którego szukamy da się w ogóle zbudować.

### **Systemy gwarantowane**

Najkrótszy z możliwych takich systemów (w którym każdy „upakowany„ układ występuje tylko jeden raz) nazywamy <b>systemem gwarantowanym</b> .
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<sup>2</sup> W czasach Steinera w odbywających się wówczas loteriach klasycznych w roli maszyny losującej występowała „sierotka”. Historia pokazała jednak, że sierotka zamiast losować często oszukiwała. Prawdziwa bomba wybuchła na jednej z loterii gdy okazało się, że przed losowaniem kule o ustalonych wcześniej numerach były podgrzewane!. Oszustwo wyszło na jaw gdy sierotka poparzyła sobie dłonie. Można by rzec: „na złodzieju nie tylko czapka gore”...

Poszukiwanie systemów gwarantowanych i systemów Steinera jest zajęciem bardzo skomplikowanym i najlepiej pozostawić go programowi komputerowemu. W naszym wypadku rozwiązaniem jest następujący system gwarantowany (Steinera):

(01, 02, 03, 06), (01, 02, 04, 08), (01, 02, 05, 07), (01, 03, 04, 05), (01, 03, 07, 08), (01, 04, 06, 07), (01, 05, 06, 08), (02, 03, 04, 07), (02, 03, 05, 08), (02, 04, 05, 06), (02, 06, 07, 08), (03, 04, 06, 08), (03, 05, 06, 07), (04, 05, 07, 08)

A oto inny ciekawy system gwarantowany Steinera wygenerowany programem ze strony <http://www.informacja.pl/lotto>

*Tabela 7. System gwarantowany: 22 liczb, 6 skreśleń, 77 zakładów, gwarantowana 3 przy 3 trafieniach. Każda trójka liczb występuje tylko jeden raz.*

(1, 2, 3, 4, 9, 10); (1, 2, 5, 6, 11, 12); (1, 2, 7, 8, 21, 22); (1, 2, 13, 15, 18, 20); (1, 2, 14, 16, 17, 19); (1, 3, 5, 8, 15, 16); (1, 3, 6, 7, 17, 18); (1, 3, 11, 13, 19, 21); (1, 3, 12, 14, 20, 22); (1, 4, 5, 7, 19, 20); (1, 4, 6, 8, 13, 14); (1, 4, 11, 16, 18, 22); (1, 4, 12, 15, 17, 21); (1, 5, 9, 13, 17, 22); (1, 5, 10, 14, 18, 21); (1, 6, 9, 16, 20, 21); (1, 6, 10, 15, 19, 22); (1, 7, 9, 11, 14, 15); (1, 7, 10, 12, 13, 16); (1, 8, 9, 12, 18, 19); (1, 8, 10, 11, 17, 20); (2, 3, 5, 7, 13, 14); (2, 3, 6, 8, 19, 20); (2, 3, 11, 15, 17, 22); (2, 3, 12, 16, 18, 21); (2, 4, 5, 8, 17, 18); (2, 4, 6, 7, 15, 16); (2, 4, 11, 14, 20, 21); (2, 4, 12, 13, 19, 22); (2, 5, 9, 15, 19, 21); (2, 5, 10, 16, 20, 22); (2, 6, 9, 14, 18, 22); (2, 6, 10, 13, 17, 21); (2, 7, 9, 12, 17, 20); (2, 7, 10, 11, 18, 19); (2, 8, 9, 11, 13, 16); (2, 8, 10, 12, 14, 15); (3, 4, 5, 6, 21, 22); (3, 4, 7, 8, 11, 12); (3, 4, 13, 16, 17, 20); (3, 4, 14, 15, 18, 19); (3, 5, 9, 11, 18, 20); (3, 5, 10, 12, 17, 19); (3, 6, 9, 12, 13, 15); (3, 6, 10, 11, 14, 16); (3, 7, 9, 16, 19, 22); (3, 7, 10, 15, 20, 21); (3, 8, 9, 14, 17, 21); (3, 8, 10, 13, 18, 22); (4, 5, 9, 12, 14, 16); (4, 5, 10, 11, 13, 15); (4, 6, 9, 11, 17, 19); (4, 6, 10, 12, 18, 20); (4, 7, 9, 13, 18, 21); (4, 7, 10, 14, 17, 22); (4, 8, 9, 15, 20, 22); (4, 8, 10, 16, 19, 21); (5, 6, 7, 8, 9, 10); (5, 6, 13, 16, 18, 19); (5, 6, 14, 15, 17, 20); (5, 7, 11, 16, 17, 21); (5, 7, 12, 15, 18, 22); (5, 8, 11, 14, 19, 22); (5, 8, 12, 13, 20, 21); (6, 7, 11, 13, 20, 22); (6, 7, 12, 14, 19, 21); (6, 8, 11, 15, 18, 21); (6, 8, 12, 16, 17, 22); (7, 8, 13, 15, 17, 19); (7, 8, 14, 16, 18, 20); (9, 10, 11, 12, 21, 22); (9, 10, 13, 14, 19, 20); (9, 10, 15, 16, 17, 18); (11, 12, 13, 14, 17, 18); (11, 12, 15, 16, 19, 20); (13, 14, 15, 16, 21, 22); (17, 18, 19, 20, 21, 22).

System gwarantowany z tabeli nr 7 daje pewną 3 przy 3 trafieniach dla obstawianych 22 liczb i 6 skreśleń. Każda z liczb występuje w tym systemie dokładnie 21 razy a każda para 5 razy.

## Konfigurowanie systemów Lotto

Z systemami gwarantowanymi Steinera wiąże się pojęcie **konfigurowania systemów Lotto**. Najlepiej zilustruje to następujący przykład.

Założmy, że wysyłamy 7 kuponów Multi Multi na które składają następujące zestawy liczb: (1,2,3); (4,5,6); (1,2,7); (3,4,5); (1,6,7); (2,3,4); (5,6,7). Można policzyć, że podanych siedem kuponów (po 3 skreślenia na każdym kuponie) zawiera: 7 różnych liczb, 14 różnych par i oczywiście 7 różnych trójek. Łatwo także sprawdzić, że z 7 liczb można, maksymalnie utworzyć: 7 różnych jedynek, 21 różnych dwójek i 35 różnych trójek. Konfiguracja naszego systemu wygląda więc następująco:

dla jedynek $(7/7)*100\% = 100\%$ dla dwójek: $(14/21)*100\% = 66,6\%$ dla trójek: $(7/35)*100\% = 20\%$
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Gdzie druga wartość oznacza, że w naszym systemie występuje 66.6% wszystkich możliwych do utworzenia dwójek liczb (ze zbioru: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

Zobaczmy teraz inny zestaw zawierający również 7 kuponów: (1, 2, 3); (1, 4, 6); (1, 5, 7); (2, 4, 5); (2, 6, 7); (3, 4, 7); (3, 5, 6). Również w tym wypadku można policzyć konfigurację naszego systemu, która wynosi (rysunek 2):

dla jedynek: 100 % dla dwójek: 100 % (no właśnie w tym systemie występuje aż 21 różnych dwójek!) dla trójek: 20 %
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Zauważmy, że drugi system jest lepiej skonfigurowany gdyż uwzględnia wszystkie możliwe do wystąpienia dwójki liczb. Co więc było nie tak w pierwszym systemie?

Skoro pierwszy system zawierał tylko 66.6% wszystkich par, to na pewno część z nich się powtórzyła. Rzeczywiście łatwo widać, że powtórzyła się np. para (1, 2) podczas gdy para (3,6) nie wystąpiła wcale.

## Systemy spójne

Kolejnym typem systemów są

**systemy spójne** w których grupę obstawianych liczb dzielimy przed wygenerowaniem systemu na kilka (od 2 do 10) podgrup. Trafienie dokładnie jednej liczby z każdej podgrupy gwarantuje pełną wygraną.

Przypuśćmy zatem, że obstawiamy 12 liczb w Lotto. Dla uproszczenia niech to będą liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Podzielmy obstawiane liczby na 6 (bo tyle skreśla się w Lotto) podgrup, np. tak.: [1, 2]; [3, 4, 5]; [6, 7]; [8] ; [9, 10]; [11, 12]. Jeżeli w kolejnym losowaniu każda z wylosowanych liczb będzie należała do innej grupy (np. wylosowane zostaną liczby: 1, 3, 6, 8, 9, 11) mamy pewną szóstkę.

Ilość zakładów które należy utworzyć aby powstał system spójny jest iloczynem ilości liczb w poszczególnych grupach (w omawianym przykładzie:  $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ ).

Omawiany system będzie wyglądał następująco:

*Tabela 8. System spójny 12 liczb, 6 grup: [1, 2]; [3, 4, 5]; [6, 7]; [8] ; [9, 10]; [11, 12].*

(1, 3, 6, 8, 9, 11); (1, 3, 6, 8, 9, 12); (1, 3, 6, 8, 10, 11); (1, 3, 6, 8, 10, 12); (1, 3, 7, 8, 9, 11); (1, 3, 7, 8, 9, 12); (1, 3, 7, 8, 10, 11); (1, 3, 7, 8, 10, 12); (1, 4, 6, 8, 9, 11); (1, 4, 6, 8, 9, 12); (1, 4, 6, 8, 10, 11); (1, 4, 6, 8, 10, 12); (1, 4, 7, 8, 9, 11); (1, 4, 7, 8, 9, 12); (1, 4, 7, 8, 10, 11); (1, 4, 7, 8, 10, 12); (1, 5, 6, 8, 9, 11); (1, 5, 6, 8, 9, 12); (1, 5, 6, 8, 10, 11); (1, 5, 6, 8, 10, 12); (1, 5, 7, 8, 9, 11); (1, 5, 7, 8, 9, 12); (1, 5, 7, 8, 10, 11); (1, 5, 7, 8, 10, 12); (2, 3, 6, 8, 9, 11); (2, 3, 6, 8, 9, 12); (2, 3, 6, 8, 10, 11); (2, 3, 6, 8, 10, 12); (2, 3, 7, 8, 9, 11); (2, 3, 7, 8, 9, 12); (2, 3, 7, 8, 10, 11); (2, 3, 7, 8, 10, 12); (2, 4, 6, 8, 9, 11); (2, 4, 6, 8, 9, 12); (2, 4, 6, 8, 10, 11); (2, 4, 6, 8, 10, 12); (2, 4, 7, 8, 9, 11); (2, 4, 7, 8, 9, 12); (2, 4, 7, 8, 10, 11); (2, 4, 7, 8, 10, 12); (2, 5, 6, 8, 9, 11); (2, 5, 6, 8, 9, 12); (2, 5, 6, 8, 10, 11); (2, 5, 6, 8, 10, 12); (2, 5, 7, 8, 9, 11); (2, 5, 7, 8, 9, 12); (2, 5, 7, 8, 10, 11); (2, 5, 7, 8, 10, 12).
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

W systemie spójnym podanym w tabeli 8 liczby: 1, 2, 6, 7, 9, 10, 11 i 12 występują 24 razy, liczby: 3, 4 i 5 występują 16 razy a liczba 8 występuje we wszystkich zakładach, czyli 48 razy.

### Systemy wielospójne

Stworzymy teraz szerszą grupę systemów które nazwiemy :

**systemami wielospójnymi**, w których oprócz podziału obstawianych liczb na grupy, określamy dodatkowo, ile trafień przewidujemy w każdej z tych grup.

Jeżeli zatem obstawiamy np. 18 liczb w Lotto. (niech to znów będą liczby: 1, 2, ... , 18) i podzielimy obstawiane liczby np. na 4 grupy, to w każdej z nich oprócz samych liczb określić musimy również ilość trafień.

Powiedzmy, że wybrane liczby podzielimy tak:

[1, 2, 3, 4, 5, 6] - w tej grupie zakładamy 2 trafienia;

[7, 8, 9, 10] - w tej grupie zakładamy 1 trafienie;

[11, 12, 13, 14, 15] - w tej grupie zakładamy 1 trafienie;

[16, 17, 18] - w tej grupie zakładamy 2 trafienia.

wówczas oczywiście liczba skreśleń na kuponie wyniesie 6 (2+1+1+2). Jeżeli w kolejnym losowaniu w pierwszej i czwartej grupie trafimy 2 liczby a w drugiej i trzeciej po jednej liczbie (np.: 3, 6, 8, 15, 16, 18) - mamy pewną szóstkę.

Mimo, że systemy wielospójne nie należą do najkrótszych (omawiany tutaj przykład składa się z 900 kuponów) to i tak znacznie zawężają (w tym wypadku: 4,84%) ilość kuponów potrzebnych do rozpisania systemu pełnego. W tak zdefiniowanym systemie liczby: 1, 2, 3, 4, 5 i 6 występują 300 razy, liczby: 7, 8, 9 i 10 występują 225 razy, liczby: 11, 12, 13, 14 i 15 występują 180 razy a liczby: 16, 17, 18 występują aż 600 razy.

### **Systemy wagowe**

W systemach skróconych opieraliśmy się na założeniu, że każda liczba występująca w systemie powtarza się jednakową ilość razy.

Pora jeszcze bardziej rozszerzyć nasz zakres poszukiwań o systemy w których dla każdej obstawianej liczby osobno określimy jej ilość (wagę) wystąpień w systemie. Systemy takie nazywamy **systemami wagowymi**.

Łatwo zauważyć, że w zależności od ilości liczb wybranych do danych grup, systemy spójne mogą być czasami systemami skróconymi a czasami systemami wagowymi o różnych wagach (tak jak system podany w tabeli 8). System skrócony natomiast jest systemem wagowym o takich samych wagach.

Założmy, że obstawiamy 10 liczb w Multi Multi np.: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Założmy również, że będziemy dokonywać 4 skreśleń w zakładzie oraz, że liczby 1, 2, 3, 4 będą występowały w systemie po 8 razy a liczby 5, 6, 7, 8, 9, 10 po 18 razy. Tablica wag będzie zatem wyglądała następująco:

Liczba	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Waga	8	8	8	8	18	18	18	18	18	18

System wygenerowany dla tak ustalonych wag składa się z 35 następujących zakładów:

(1, 2, 6, 7); (1, 3, 5, 7); (1, 3, 5, 9); (1, 3, 6, 8); (1, 3, 7, 9); (1, 4, 6, 9); (1, 5, 6, 10); (1, 5, 7, 9); (2, 3, 7, 8); (2, 4, 6, 8); (2, 4, 6, 10); (2, 4, 7, 9); (2, 4, 8, 10); (2, 5, 7, 10); (2, 6, 8, 10); (3, 4, 8, 9); (3, 5, 7, 9); (3, 5, 8, 10); (4, 5, 9, 10); (4, 6, 8, 10); (5, 6, 7, 8); (5, 6, 7, 9); (5, 6, 7, 10); (5, 6, 8, 9); (5, 6, 8, 10); (5, 6, 9, 10); (5, 7, 8, 9); (5, 7, 8, 10); (5, 7, 9, 10); (5, 8, 9, 10); (6, 7, 8, 9); (6, 7, 8, 10); (6, 7, 9, 10); (6, 8, 9, 10); (7, 8, 9, 10);



## Systemy Lotto z gwarancją

Rozważania na temat systemów oraz ich konfigurowania podsumujemy opisem systemów Lotto, które będziemy generowali dla z góry określonej gwarancji.

**Systemy z gwarancją** charakteryzują następujące parametry:

- ✓ Ilość obstawianych przez gracza liczb  $n$ ,
- ✓ Ilość skreśleń w jednym zakładzie  $k$ ,
- ✓ Gwarancja trafienia  $g$  liczb przy założeniu wylosowania  $t$  spośród obstawianych  $n$  liczb.

Jeżeli  $g = t$  to system z gwarancją nazywamy podstawowym, natomiast gdy  $g < t$  – systemem z obniżoną gwarancją.

Pokażemy teraz praktyczny przykład, który wyjaśni istotę systemów z gwarancją. W Lotto losowanych jest 6 z puli 49 liczb. Ilość skreśleń w jednym zakładzie wynosi zatem:  $k = 6$ . Załóżmy dalej, że gracz obstawia z tych 49 liczb tylko 12. Dla uproszczenia niech to będą liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Ilość obstawianych przez gracza liczb wynosi więc:  $n = 12$ .

Następnie gracz decyduje jaką chciałby mieć gwarancję, że trafiając np. 5 liczb ( $t = 5$ ) spośród obstawianych 12 liczb, będzie miał taką piątkę ( $g = 5$ ) na skreślonych przez siebie zakładach. Wybiera więc gwarancję 5 przy 5. Gracz chce mieć zatem pewność: *„Jeżeli trafię choćby 5 liczb spośród 12 obstawianych, to będę miał te 5 liczb skreślone na wysłanych przeze mnie zakładach. Wybieram gwarancję - gwarantowana piątka przy pięciu trafieniach”*.

Teraz gracz musi stworzyć system z wybraną przez siebie gwarancją. W jaki sposób ma to zrobić? Istnieje wiele gotowych schematów takich systemów, rozpisanych dla różnych wariantów  $n/k/t/g$  i rozpowszechnianych od wielu lat w sprzedaży wysyłkowej. Wytrawny gracz szanujący swoje pieniądze, zapyta jednak: *„Ile zakładów będę musiał wysłać? ...i dlaczego tak dużo? Skąd będę miał pewność, że konkretny system będzie wiarygodny i pewny a jednocześnie będzie składał się z minimalnej potrzebnej ilości zakładów???”*.

Minimalny system spełniający wymagania naszego gracza składa się, w tym wypadku, ze 132 zakładów. System ten jest systemem gwarantowanym Steinera. Gracz spotka zapewne w sieci internet również systemy złożone np. ze 172, a nawet jeszcze większej liczby zakładów. Wybierając jednak „zbyt duży” system, grający dopłaci niepotrzebnie od 30% do nawet 100% wartości zakładów.

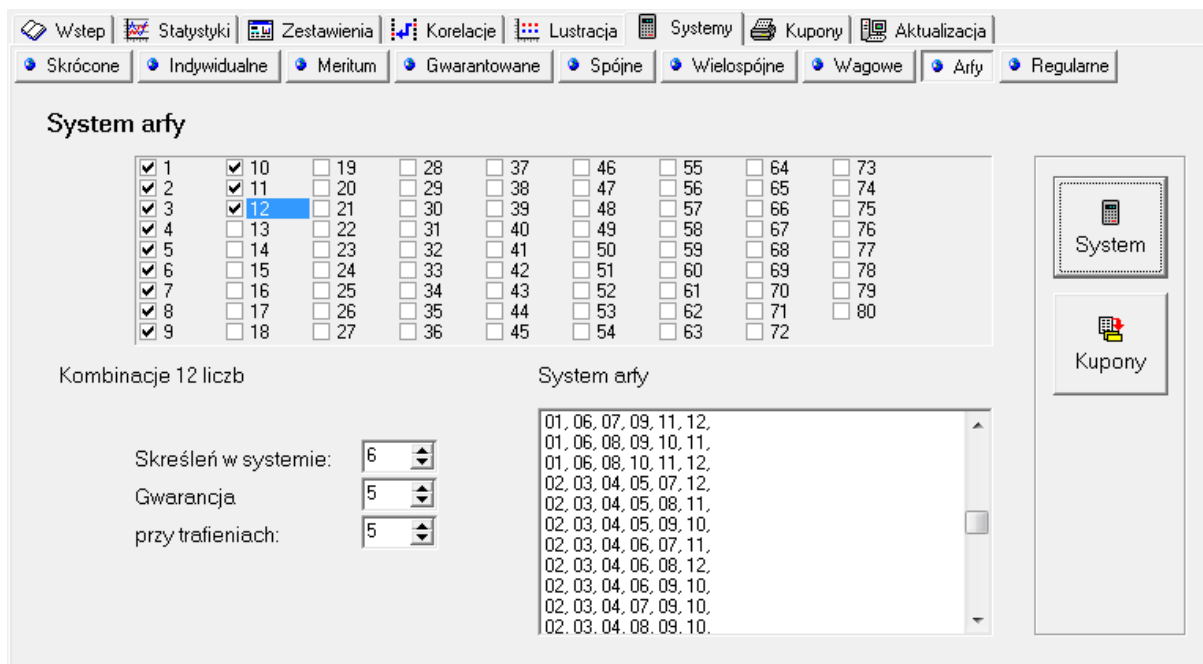
W tabeli 9 zaprezentowano poszukiwany przez gracza system.

Systemy z gwarancją dla Lotto, Mini Lotto i Multi Multi można generować oprogramowaniem dostępnym w Internecie pod adresem: <http://www.informacja.pl/lotto>

## Systemy Arfy

Najkrótsze (a więc i najtańsze) takie systemy nazywamy **systemami Arfy**<sup>3</sup>.

Rysunek 2. Generowanie systemów Arfy z gwarancją w programie Multi Multi firmy Falcom.



Zródło: <http://www.informacja.pl/lotto>

Tabela 9. System z gwarancją 5 przy 5. 12 liczb, 6 skreśleń, 132 zakłady.

1.	(1, 2, 3, 4, 5, 7)	45.	(1, 3, 6, 8, 9, 11)	89.	(2, 4, 5, 9, 10, 11)
2.	(1, 2, 3, 4, 6, 12)	46.	(1, 3, 6, 9, 10, 12)	90.	(2, 4, 6, 7, 11, 12)
3.	(1, 2, 3, 4, 8, 11)	47.	(1, 3, 7, 9, 10, 11)	91.	(2, 4, 6, 8, 10, 11)
4.	(1, 2, 3, 4, 9, 10)	48.	(1, 3, 8, 10, 11, 12)	92.	(2, 4, 6, 9, 10, 12)
5.	(1, 2, 3, 5, 6, 9)	49.	(1, 4, 5, 6, 7, 11)	93.	(2, 4, 7, 8, 9, 10)
6.	(1, 2, 3, 5, 8, 12)	50.	(1, 4, 5, 6, 9, 12)	94.	(2, 4, 8, 9, 11, 12)
7.	(1, 2, 3, 5, 10, 11)	51.	(1, 4, 5, 7, 8, 12)	95.	(2, 5, 6, 7, 10, 11)
8.	(1, 2, 3, 6, 7, 11)	52.	(1, 4, 5, 7, 9, 10)	96.	(2, 5, 6, 8, 9, 10)
9.	(1, 2, 3, 6, 8, 10)	53.	(1, 4, 5, 8, 10, 11)	97.	(2, 5, 6, 9, 11, 12)

<sup>3</sup> Arfa to sito do żwiru, którym odsiewa się niepotrzebne większe kamienie. Algorytm komputerowy Arfa, odsiewa niepotrzebne zakłady, minimalizując liczbę niezbędnych zakładów dla wybranej przez gracza gwarancji.

10.	(1, 2, 3, 7, 8, 9)	54.	(1, 4, 6, 7, 10, 12)	98.	(2, 5, 7, 8, 9, 12)
11.	(1, 2, 3, 7, 10, 12)	55.	(1, 4, 6, 8, 9, 10)	99.	(2, 5, 8, 10, 11, 12)
12.	(1, 2, 3, 9, 11, 12)	56.	(1, 4, 6, 8, 11, 12)	100.	(2, 6, 7, 8, 9, 11)
13.	(1, 2, 4, 5, 6, 10)	57.	(1, 4, 7, 8, 9, 11)	101.	(2, 6, 7, 8, 10, 12)
14.	(1, 2, 4, 5, 8, 9)	58.	(1, 4, 9, 10, 11, 12)	102.	(2, 7, 9, 10, 11, 12)
15.	(1, 2, 4, 5, 11, 12)	59.	(1, 5, 6, 7, 8, 9)	103.	(3, 4, 5, 6, 7, 12)
16.	(1, 2, 4, 6, 7, 8)	60.	(1, 5, 6, 8, 10, 12)	104.	(3, 4, 5, 6, 9, 10)
17.	(1, 2, 4, 6, 9, 11)	61.	(1, 5, 6, 9, 10, 11)	105.	(3, 4, 5, 7, 8, 9)
18.	(1, 2, 4, 7, 9, 12)	62.	(1, 5, 7, 10, 11, 12)	106.	(3, 4, 5, 7, 10, 11)
19.	(1, 2, 4, 7, 10, 11)	63.	(1, 5, 8, 9, 11, 12)	107.	(3, 4, 5, 8, 11, 12)
20.	(1, 2, 4, 8, 10, 12)	64.	(1, 6, 7, 8, 10, 11)	108.	(3, 4, 6, 7, 8, 11)
21.	(1, 2, 5, 6, 7, 12)	65.	(1, 6, 7, 9, 11, 12)	109.	(3, 4, 6, 8, 10, 12)
22.	(1, 2, 5, 6, 8, 11)	66.	(1, 7, 8, 9, 10, 12)	110.	(3, 4, 6, 9, 11, 12)
23.	(1, 2, 5, 7, 8, 10)	67.	(2, 3, 4, 5, 6, 11)	111.	(3, 4, 7, 9, 10, 12)
24.	(1, 2, 5, 7, 9, 11)	68.	(2, 3, 4, 5, 8, 10)	112.	(3, 4, 8, 9, 10, 11)
25.	(1, 2, 5, 9, 10, 12)	69.	(2, 3, 4, 5, 9, 12)	113.	(3, 5, 6, 7, 9, 11)
26.	(1, 2, 6, 7, 9, 10)	70.	(2, 3, 4, 6, 7, 10)	114.	(3, 5, 6, 8, 9, 12)
27.	(1, 2, 6, 8, 9, 12)	71.	(2, 3, 4, 6, 8, 9)	115.	(3, 5, 6, 8, 10, 11)
28.	(1, 2, 6, 10, 11, 12)	72.	(2, 3, 4, 7, 8, 12)	116.	(3, 5, 7, 8, 10, 12)
29.	(1, 2, 7, 8, 11, 12)	73.	(2, 3, 4, 7, 9, 11)	117.	(3, 5, 9, 10, 11, 12)
30.	(1, 2, 8, 9, 10, 11)	74.	(2, 3, 4, 10, 11, 12)	118.	(3, 6, 7, 8, 9, 10)
31.	(1, 3, 4, 5, 6, 8)	75.	(2, 3, 5, 6, 7, 8)	119.	(3, 6, 7, 10, 11, 12)
32.	(1, 3, 4, 5, 9, 11)	76.	(2, 3, 5, 6, 10, 12)	120.	(3, 7, 8, 9, 11, 12)
33.	(1, 3, 4, 5, 10, 12)	77.	(2, 3, 5, 7, 9, 10)	121.	(4, 5, 6, 7, 8, 10)
34.	(1, 3, 4, 6, 7, 9)	78.	(2, 3, 5, 7, 11, 12)	122.	(4, 5, 6, 8, 9, 11)
35.	(1, 3, 4, 6, 10, 11)	79.	(2, 3, 5, 8, 9, 11)	123.	(4, 5, 6, 10, 11, 12)
36.	(1, 3, 4, 7, 8, 10)	80.	(2, 3, 6, 7, 9, 12)	124.	(4, 5, 7, 9, 11, 12)
37.	(1, 3, 4, 7, 11, 12)	81.	(2, 3, 6, 8, 11, 12)	125.	(4, 5, 8, 9, 10, 12)
38.	(1, 3, 4, 8, 9, 12)	82.	(2, 3, 6, 9, 10, 11)	126.	(4, 6, 7, 8, 9, 12)
39.	(1, 3, 5, 6, 7, 10)	83.	(2, 3, 7, 8, 10, 11)	127.	(4, 6, 7, 9, 10, 11)
40.	(1, 3, 5, 6, 11, 12)	84.	(2, 3, 8, 9, 10, 12)	128.	(4, 7, 8, 10, 11, 12)
41.	(1, 3, 5, 7, 8, 11)	85.	(2, 4, 5, 6, 7, 9)	129.	(5, 6, 7, 8, 11, 12)
42.	(1, 3, 5, 7, 9, 12)	86.	(2, 4, 5, 6, 8, 12)	130.	(5, 6, 7, 9, 10, 12)
43.	(1, 3, 5, 8, 9, 10)	87.	(2, 4, 5, 7, 8, 11)	131.	(5, 7, 8, 9, 10, 11)

44.	(1, 3, 6, 7, 8, 12)	88.	(2, 4, 5, 7, 10, 12)	132.	(6, 8, 9, 10, 11, 12)
-----	---------------------	-----	----------------------	------	-----------------------

Zródło: <http://www.informacja.pl/lotto>

Konfiguracja<sup>4</sup> systemu podanego w tabeli 9 jest następująca:

1-ek: 100 % (x66)

2-ek: 100 % (x30)

3-ek: 100 % (x12)

4-ek: 100 % (x4)

5-ek: 100 % (gwarantowany)

6-ek: 14,2857 %

System gwarantuje piątkę przy trafieniu 5 spośród 12 liczb.

---

<sup>4</sup> Wartości podane w nawiasach oznaczają ile razy dane kombinacje liczb powtarzają się w systemie. Przykładowo każda dowolna liczba występuje 66 razy, każda trójka liczb 12 razy a każda piątka liczb dokładnie 1 raz (system gwarantowany). Nie trudno zauważyć, że przy założonej ilości kuponów, spośród wszystkich systemów, najlepiej skonfigurowane są systemy gwarantowane.

## Zakończenie

Koniec jest początkiem. Napisałem tego e-booka, aby pomóc wszystkim graczom w osiągnięciu ich zamierzeń związanych z grą w Lotto. Pamiętajcie jednak, że gra to nie jest całe życie! Gra powinna być zabawą. Nie powinna pochłoniąć Was całkowicie. Traktujcie ją jako hobby a z pewnością Wam się odwzajemni!. Poszerzycie swoją wiedzę matematyczną, będziecie dobrze się bawić, a może nawet uzyskacie wymarzoną wygraną. Tego Wam gorąco życzę.

## Podziękowanie

Oprogramowanie dla systemu Windows znajdujące się na stronie internetowej: <http://www.informacja.pl/lotto>, powstało w latach 1996-2011 i nadal jest rozwijane. Programy są sprzedawane komercyjnie a pierwsza wersja części ich algorytmów została opracowana jeszcze w roku 1992 jako oprogramowanie dla systemu operacyjnego DOS. Algorytmy te powstały wówczas z inspiracji mojego wieloletniego kolegi, kompana wspólnych rejsów po jeziorach mazurskich, zabawnego i dowcipnego gracza i hobbysty Jacka Kowalskiego z Łodzi. Bardzo mu za to dziękuję.

## Informacja o autorze

Autor jest absolwentem Wydziału Matematyki i Wydziału Zarządzania Uniwersytetu Łódzkiego. Kontakt z autorem możliwy jest poprzez e-mail:

[lotto@informacja.pl](mailto:lotto@informacja.pl)

Na podany adres proszę kierować wszystkie swoje sugestie i propozycje kolejnych zagadnień, które mogą zostać zamieszczone w kolejnej wersji tego opracowania.

Przeczytaj również o filtrowaniu systemów: <http://www.informacja.pl/lotto/filtrowanie.pdf>

## Statystyka

Statystyka oryginalnego dokumentu wersja 1.0

Nazwa statystyczna	Wartość
Stron:	29
Akapitów:	841
Wierszy:	1447
Wyrazów:	8512
Znaków:	37703
Znaków (ze spacjami):	45542